

## **Dimensionamento Estrutural da Árvore de Manivelas de um Motor Diesel de Alta Potência**

**Alexandre Schalch Mendes**  
MWM Motores Diesel Ltda.

**Luiz Fernando Raminelli**  
MWM Motores Diesel Ltda.

**Marcelo Peregrina Gomez**  
MWM Motores Diesel Ltda.

FILIADA A  
**SAE**  
INTERNATIONAL<sup>®</sup>

**SAE BRASIL**<sup>®</sup>

**Congresso 2003**  
**SAE BRASIL**<sup>®</sup>

12º Congresso e Exposição Internacionais  
de Tecnologia da Mobilidade  
São Paulo, Brasil  
18 a 20 de novembro de 2003

# Dimensionamento Estrutural da Árvore de Manivelas de um Motor Diesel de Alta Potência

Alexandre Schalch Mendes  
Luiz Fernando Raminelli  
Marcelo Peregrina Gomez  
MWM Motores Diesel Ltda.

Copyright © 2003 Society of Automotive Engineers, Inc

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo o dimensionamento estrutural da árvore de manivelas de um motor Diesel de quatro cilindros, quatro tempos, considerando as cargas geradas pela combustão, inércias e vibrações torcionais, desconsiderando a utilização do amortecedor de vibrações acoplado ao componente.

Essas condições de contorno serão aplicadas a um modelo de elementos finitos para a verificação do ciclo de fadiga atuante, para que finalmente, seja avaliado o coeficiente de segurança do componente.

## INTRODUÇÃO

Uma árvore de manivelas está sujeita a uma série de esforços dinâmicos que atuam de forma periódica, gerando vibrações e conseqüentemente tensões, as quais deverão ser quantificadas para que possamos assegurar a integridade estrutural do componente.

Atualmente, devido às exigências tanto técnicas quanto comerciais, existe a necessidade dos motores de combustão interna operar com pressões de combustão cada vez mais elevadas, utilizando-se componentes que devem ser otimizados da melhor forma possível.

Os métodos modernos de cálculo permitem uma precisa avaliação dos níveis de tensões atuantes nas árvores de manivelas, bem como a verificação da sua resistência à fadiga. Desse modo, é possível obter coeficientes de segurança que garantam uma confiabilidade suficiente para que não ocorram falhas de campo, bem como evitar o super dimensionamento dos componentes.

## CINEMÁTICA DO SISTEMA BIELA-MANIVELA

Inicialmente, para que se entenda o comportamento dinâmico de um motor de vários cilindros, é necessária a compreensão e equacionamento cinemático para um motor de um único cilindro [1], [2], [3].

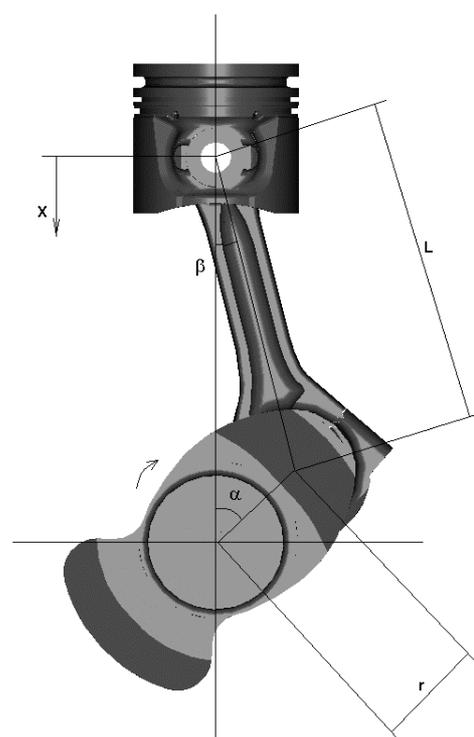


Figura 1: Sistema biela / manivela.

A posição instantânea do pistão em relação ao TDC pode ser escrita em função dos ângulos e dimensões destacados na figura 1:

$$x = (r + L) - (r \cdot \cos \alpha + L \cdot \cos \beta) \quad (1)$$

Agrupando os termos, temos:

$$x = r \cdot (1 - \cos \alpha) + L \cdot (1 - \cos \beta) \quad (2)$$

Podemos obter o ângulo  $\beta$  como sendo uma função do ângulo  $\alpha$ . Chamando de  $\lambda$  a relação entre o meio curso da árvore de manivelas e o comprimento da biela, temos:

$$\sin \beta = \frac{r}{L} \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \beta = \lambda \cdot \sin \alpha \quad ;$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \alpha} \quad (3)$$

$$\therefore x = r \cdot (1 - \cos \alpha) + L \cdot (1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \alpha}) \quad (4)$$

Expandindo em série a expressão da equação 3, temos:

$$\cos \beta = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \cdot \sin^2 \alpha - \frac{1}{8} \lambda^4 \cdot \sin^4 \alpha - \frac{1}{16} \lambda^6 \cdot \sin^6 \alpha$$

Das relações trigonométricas, temos:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2\alpha \quad ;$$

$$\sin^4 \alpha = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2\alpha + \frac{1}{8} \cdot \cos 4\alpha \quad ;$$

$$\sin^6 \alpha = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cdot \cos 2\alpha + \frac{3}{16} \cdot \cos 4\alpha - \frac{1}{32} \cdot \cos 6\alpha$$

Fazendo-se as devidas substituições na equação 4, chegaremos finalmente à seguinte expressão:

$$\cos \beta = 1 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} \cdot \cos 2\alpha - \frac{\lambda^4}{64} \cdot \cos 4\alpha + \frac{\lambda^6}{512} \cdot \cos 6\alpha + \dots$$

Como  $\lambda$  é um número pequeno, os termos superiores à segunda ordem podem ser desprezados sem que haja um comprometimento com a precisão dos cálculos. Portanto, a expressão que descreve o movimento do pistão em relação ao TDC pode ser escrita como:

$$x = r \cdot (1 - \cos \alpha) + L \cdot \frac{\lambda^2}{4} (1 - \cos 2\alpha) \quad (5)$$

Podemos agora, obter as equações da velocidade e aceleração instantâneas do pistão, da seguinte maneira:

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \omega \cdot \frac{dx}{d\alpha} \quad ;$$

$$a = \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \omega \cdot \frac{dv}{d\alpha}$$

Onde  $\omega$  é a velocidade angular da árvore de manivelas e pode ser expressa como:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n$$

Derivando a equação 5, teremos:

$$v = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot r \cdot (\sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \sin 2\alpha) \quad (6)$$

Derivando a equação 6, teremos:

$$a = (2 \cdot \pi \cdot n)^2 \cdot r \cdot (\cos \alpha + \lambda \cdot \cos 2\alpha) \quad (7)$$

## DETERMINAÇÃO DOS ESORÇOS DINÂMICOS

**FORÇA DA COMBUSTÃO** – É a força gerada pelos gases durante o processo da combustão. Com a curva da pressão interna do cilindro em função do ângulo da árvore de manivelas, é possível calcular a força instantânea atuante no pistão. Geralmente é interessante obter essas curvas por métodos experimentais.

As curvas  $p=f(\alpha)$  variam de acordo com o regime de operação e a rotação do motor e podem ser obtidas através da utilização de um sensor de pressão, instalado geralmente no cabeçote do motor, de forma a medir a pressão no interior do cilindro. Um “trigger” e um sensor de rotações também são necessários para que se calcule o ângulo instantâneo da árvore de manivelas em relação ao TDC do pistão.

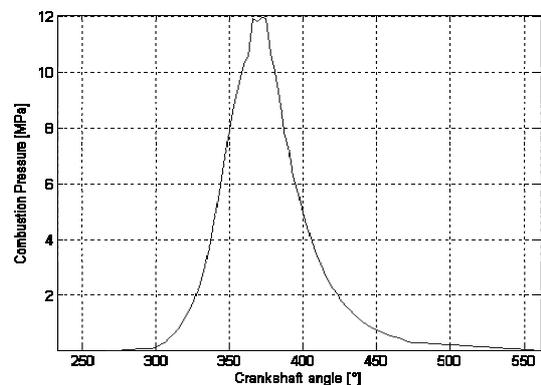


Figura 2: Curva  $p = f(\alpha)$  para a condição de 2500 rpm.

A força atuante no pistão, para um determinado valor da pressão de combustão, pode ser obtida através da seguinte equação:

$$F_g = p \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad (8)$$

Onde  $d$  é o diâmetro do pistão.

**FORÇAS DE INÉRCIA** – Existem dois tipos de forças de inércia que atuam num sistema biela / manivela.

As massas envolvidas nesse tipo de sistema podem ser reduzidas e separadas basicamente em dois tipos, uma primeira que possui movimento puramente rotativo e outra que descreve um movimento alternativo. São essas massas que irão gerar os esforços que serão quantificados a seguir.

**Força de Inércia Alternativa** – São esforços decorrentes do movimento das massas alternativas ( $m_a$ ). Estas massas podem ser consideradas como sendo a soma das massas do pistão incluindo pino, anéis, travas e a massa alternativa da biela.

Partindo do princípio onde  $\sum \vec{F} = m_a \cdot \vec{a}$ , teremos a seguinte expressão para obtenção da força de inércia alternativa:

$$F_a = m_a \cdot r \cdot \omega^2 (\cos \alpha + \lambda \cdot \cos 2\alpha - \frac{\lambda^3}{4} \cos 4\alpha + \frac{9\lambda^5}{128} \cos 6\alpha)$$

A consideração apenas dos termos de primeira e segunda ordem para o cálculo da força de inércia alternativa, não implica em uma redução na precisão dos cálculos.

A força tangencial de inércia pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$F_{ta} = F_a \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \quad (9)$$

**Força de Inércia Rotativa** – São forças geradas pelas massas que possuem movimento puramente rotativo ( $m_r$ ). Essas massas podem ser consideradas como sendo a soma da parte rotativa da biela e da manivela do virabrequim.

É importante observar, que dependendo do grau de balanceamento da árvore de manivelas, maiores ou menores serão as tensões geradas por esses esforços.

A força de inércia rotativa pode ser quantificada através da seguinte equação:

$$F_a = m_r \cdot r \cdot \omega^2 \quad (10)$$

A biela, como visto, pode ser dividida em duas massas equivalentes. Uma que irá descrever um movimento alternativo e outra de movimento rotativo puro.

De um modo geral podemos utilizar, sem comprometer a precisão nos cálculos, as seguintes relações:

$$\text{Massa alternativa da biela: } m_{ab} = \frac{1}{3} \cdot m_b$$

$$\text{Massa rotativa da biela: } m_{rb} = \frac{2}{3} \cdot m_b$$

Onde  $m_b$  é a massa total da biela, incluindo bronzinas, parafusos e bucha.

**FORÇAS RESULTANTES NA ÁRVORE DE MANIVELAS** – De acordo com a figura abaixo, podemos notar que com a decomposição da força no pistão, teremos duas componentes que irão atuar no moente da árvore de manivelas, uma radial que irá promover a flexão das manivelas gerando tensões elevadas nos raios dos moentes e munhões e uma outra componente que será a responsável pela geração de torque no motor.

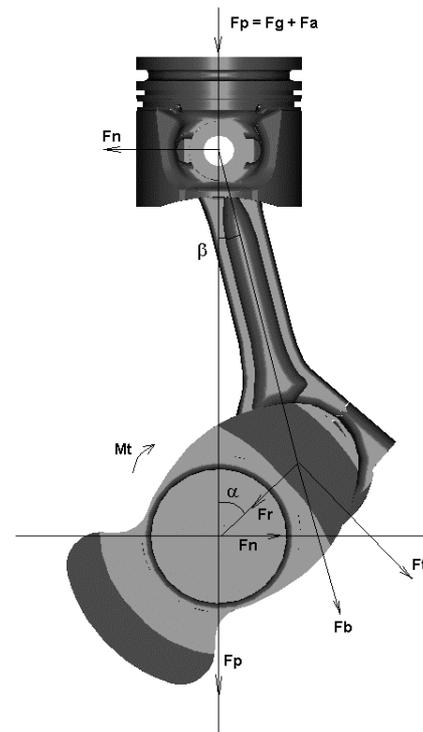


Figura 3: Esforços atuantes na árvore de manivelas.

A força tangencial decorrente da pressão de combustão será:

$$F_{tp} = F_p \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \quad (11)$$

Podemos calcular agora a força tangencial resultante que atuará no moente da árvore de manivelas:

$$F_t = F_{tp} - F_{ta} \quad (12)$$

Considerando a próxima equação, é possível quantificar a força radial devido à combustão e seguindo a mesma metodologia, podemos calcular a força radial resultante considerando os efeitos das forças de inércia.

$$F_{rp} = F_p \cdot \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \quad (13)$$

Nas figuras abaixo, podemos observar a variação dessas forças em função do ângulo da árvore de manivelas.

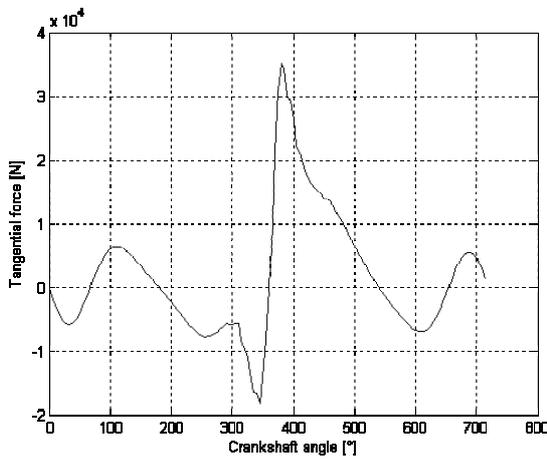


Figura 4: Força tangencial para a condição de 2500 rpm.

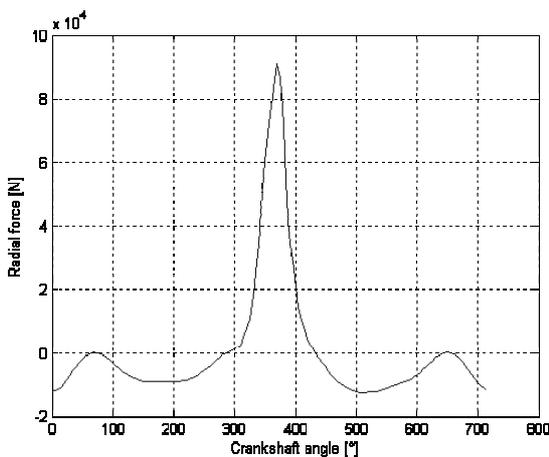


Figura 5: Força radial para a condição de 2500 rpm.

Podemos notar que o valor da força radial é consideravelmente superior ao da força tangencial e dessa forma, as tensões de flexão costumam ser maiores que as de torção.

Esta afirmação é verdadeira se partirmos do princípio que a árvore de manivelas seja projetada de tal forma, onde a excitação proveniente das forças tangenciais não irá gerar deslocamentos de grandes amplitudes e conseqüentemente tensões de cisalhamento elevadas.

Esse tipo de verificação é possível de ser realizada através de um cálculo que permita a obtenção das amplitudes decorrentes das vibrações.

O procedimento para esse tipo de cálculo será demonstrado a seguir.

**VIBRAÇÕES TORCIONAIS** – As árvores de manivelas estão sujeitas simultaneamente a vibrações axiais, flexionais e torcionais. Os métodos atuais de projeto consideram apenas os efeitos gerados pelas vibrações torcionais [4], [5], [6].

Atualmente, o projeto da árvore de manivelas deve prever sua utilização em aplicações onde são necessárias altas pressões de combustão, para que se atenda às normas atuais de emissões e aos altos torques e potências requeridas para os mais variados tipos de aplicações.

Esses fatores algumas vezes resultam em amplitudes de vibrações torcionais extremamente elevadas, gerando altas tensões de cisalhamento e comprometendo o projeto do componente.

Para reduzir essas tensões de cisalhamento, podem ser utilizados amortecedores de vibrações torcionais do tipo viscoso, histerético, etc., que são na sua maioria, fixados na parte anterior da árvore de manivelas. É possível ainda, modificar o formato das curvas de combustão, através dos recursos existentes nos sistemas de injeção eletrônica de combustível, de forma a prolongarmos o tempo de atuação da força tangencial na árvore de manivelas. Neste estudo, foi verificado que não existe a necessidade de utilizarmos o amortecedor de vibrações.

**Modelo Matemático Equivalente** – Para que possamos efetuar os cálculos, é necessário que seja montado um sistema massa/mola do tipo torcional que represente da melhor forma possível a árvore de manivelas em estudo.

Esse sistema, no caso de um motor de quatro cilindros, pode possuir seis graus de liberdade e ser representado da seguinte forma:

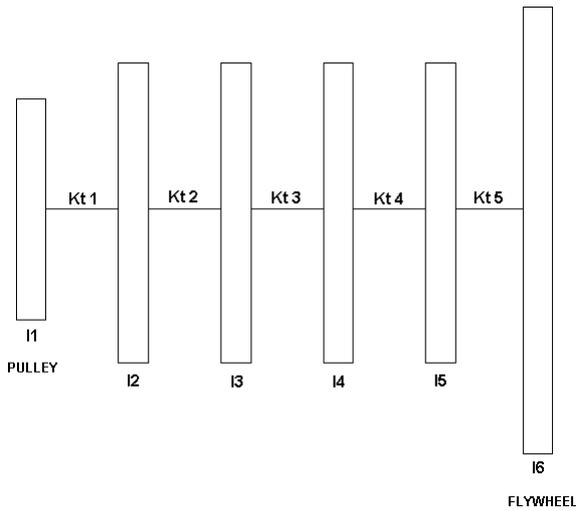


Figura 6: Modelo equivalente.

Os valores das inércias e rigidez torcional entre cada elemento podem ser obtidos através de softwares de CAD e CAE respectivamente e oferecem excelente precisão quando comparados aos valores obtidos experimentalmente.

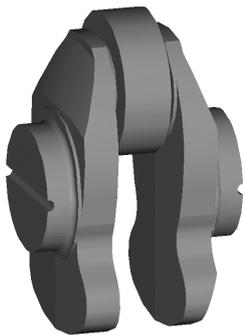


Figura 7: Modelo para obtenção da inércia de uma manivela.

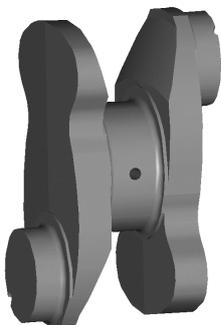


Figura 8: Modelo para obtenção da rigidez torcional entre as manivelas.

É importante observar que a inércia da massa rotativa da biela deve ser incorporada à inércia da manivela.

Autovalores e Autovetores – Partindo da equação diferencial para as vibrações mecânicas e valores das inércias e rigidezes obtidos, é possível pela análise modal, calcular as frequências naturais e modos de vibrar da árvore de manivelas.

Para vibrações mecânicas temos:

$$M \cdot \ddot{\theta}(t) + C \cdot \dot{\theta}(t) + K \cdot \theta(t) = T(t) \quad (14)$$

Onde  $\theta(t)$  e  $T(t)$  são vetores que representam respectivamente as amplitudes de vibração e o torque de excitação para cada inércia do sistema.

As matrizes de inércia, rigidez e amortecimento são montadas da seguinte forma:

$$M = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_6 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} Kt_1 & -Kt_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Kt_1 & Kt_1 + Kt_2 & -Kt_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Kt_2 & Kt_2 + Kt_3 & -Kt_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Kt_3 & Kt_3 + Kt_4 & -Kt_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Kt_4 & Kt_4 + Kt_5 & -Kt_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Kt_5 & Kt_5 \end{bmatrix}$$

A matriz de amortecimento pode ser obtida como sendo uma proporção das matrizes de inércia e rigidez, de acordo com a seguinte equação:

$$C = \alpha \cdot [M] + \beta \cdot [K] \quad (15)$$

Como no nosso caso, não estamos considerando a utilização de anti-vibrador, e o material do virabrequim é isotrópico, a matriz de amortecimento pode ser considerada como sendo proporcional apenas à matriz de rigidez.

Portanto:

$$C = \beta \cdot K$$

O fator  $\beta$  utilizado nos cálculos foi ajustado a partir de comparações entre as amplitudes obtidas teoricamente e as medidas experimentalmente e seu valor é 0,000018.

As massas alternativas deverão ser substituídas por inércias equivalentes, as quais deverão possuir a mesma energia cinética do movimento dos pistões.

Utilizaremos nos cálculos a inércia média durante uma rotação da árvore de manivelas e seu valor pode ser quantificado através da seguinte equação:

$$I_{alt} = ma \cdot r^2 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{8} \right) \quad (16)$$

Com as matrizes definidas, podemos obter agora as frequências naturais e os modos de vibrar do componente, a partir das seguintes equações [7]:

$$\det[-\lambda^2[M] + [K]] = 0 \quad (17)$$

$$[-\lambda^2[M] + [K]] \cdot X = 0 \quad (18)$$

Iremos obter, no nosso caso, 6 valores de  $\lambda^2$  que satisfazem a condição imposta do determinante da equação 17. Esses valores representam o quadrado das frequências naturais do sistema.

Admitindo os valores das frequências naturais obtidas anteriormente e calculando o sistema de equações formado a partir da equação 18, é possível chegar às relações de deslocamentos que são os modos próprios de vibrar.

Cada modo correspondente a uma frequência natural, irá ser representado na forma de um vetor coluna  $\{X\}$ , ou seja:

$$\text{Para } \lambda = \lambda_1 \Rightarrow X^{(1)} = \{X_1^{(1)} \quad X_2^{(1)} \quad \dots \quad X_6^{(1)}\}^T$$

$$\text{Para } \lambda = \lambda_2 \Rightarrow X^{(2)} = \{X_1^{(2)} \quad X_2^{(2)} \quad \dots \quad X_6^{(2)}\}^T$$

E assim até a sexta frequência  $\lambda$ .

$$\text{Para } \lambda = \lambda_6 \Rightarrow X^{(6)} = \{X_1^{(6)} \quad X_2^{(6)} \quad \dots \quad X_6^{(6)}\}^T$$

Encontrados os seis modos, podemos montar agora a matriz dos modos de vibrar, ou matriz modal.

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & X_1^{(3)} & X_1^{(4)} & X_1^{(5)} & X_1^{(6)} \\ X_2^{(1)} & X_2^{(2)} & X_2^{(3)} & X_2^{(4)} & X_2^{(5)} & X_2^{(6)} \\ X_3^{(1)} & X_3^{(2)} & X_3^{(3)} & X_3^{(4)} & X_3^{(5)} & X_3^{(6)} \\ X_4^{(1)} & X_4^{(2)} & X_4^{(3)} & X_4^{(4)} & X_4^{(5)} & X_4^{(6)} \\ X_5^{(1)} & X_5^{(2)} & X_5^{(3)} & X_5^{(4)} & X_5^{(5)} & X_5^{(6)} \\ X_6^{(1)} & X_6^{(2)} & X_6^{(3)} & X_6^{(4)} & X_6^{(5)} & X_6^{(6)} \end{bmatrix}$$

Através da normalização, é possível obter matrizes diagonalizadas.

$$\tilde{M} = [\Phi]^T \cdot [M] \cdot [\Phi] \quad (19)$$

$$\hat{\Phi} = [\Phi] \cdot [\tilde{M}]^{-1/2} \quad (20)$$

$$\bar{M} = [\hat{\Phi}]^T \cdot [M] \cdot [\hat{\Phi}] \quad (21)$$

$$\bar{K} = [\hat{\Phi}]^T \cdot [K] \cdot [\hat{\Phi}] \quad (22)$$

$$\bar{C} = [\hat{\Phi}]^T \cdot [C] \cdot [\hat{\Phi}] \quad (23)$$

Determinação dos Fatores de Amortecimento – A partir das matrizes diagonalizadas podemos obter os fatores de amortecimento para cada modo de vibrar, utilizando a seguinte equação:

$$\zeta = \frac{[\bar{C}_{n,n}]}{2 \cdot \sqrt{[\bar{K}_{n,n}]}} \quad ; \quad \text{com } n = 1 \dots 6 \quad (24)$$

Solução através da Equação de Estado – Definiremos agora um vetor de estado e sua derivada no tempo:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\theta}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \end{Bmatrix} \quad ; \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Pode-se expressar o comportamento dinâmico do virabrequim através do sistema de equações diferenciais de 1ª ordem:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \quad ; \quad \mathbf{x}(0) = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\theta}(0) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}(0) \end{Bmatrix} \quad (26)$$

Onde  $\mathbf{x}(0)$  é a condição inicial do sistema. A matriz  $[\mathbf{A}]$  e o vetor  $\{\mathbf{b}\}$  possuem a seguinte forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{C} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{T}(t) \end{bmatrix} \quad (27)$$

A matriz [A] possui dimensões (12 x 12) para seis graus de liberdade e o vetor das excitações {b}, a dimensão de (12 x 1).

Cálculo do Torque de Excitação – Como visto anteriormente o momento torçor que atua na árvore de manivelas varia de acordo com o ângulo do virabrequim, com a rotação e a carga do motor. Podemos quantificar este torque através da seguinte equação:

$$Mt = Ft \cdot r \quad (28)$$

O torque atuante em cada manivela é uma função periódica contínua e a solução para esse tipo de excitação é obtida a partir da sua expansão em série de Fourier [8].

$$Mt^k(t) = \frac{A_0^k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^k \cdot \cos(n\omega \cdot t) + B_n^k \cdot \sin(n\omega \cdot t)] \quad (29)$$

O índice k indica o cilindro para o qual faremos a expansão da curva de torque, visto que existe uma defasagem na sua aplicação, de cilindro para cilindro. Essa defasagem, em graus do virabrequim, é função do intervalo de ignição do motor e obviamente do valor de k. O índice n representa o número de termos da série em que se deseja realizar a expansão. A maioria dos autores considera como ideal a expansão em 24 termos, porém, para a maioria dos casos dos motores Diesel, 20 termos são suficientes.

A figura seguinte mostra graficamente o princípio da expansão em série de Fourier.

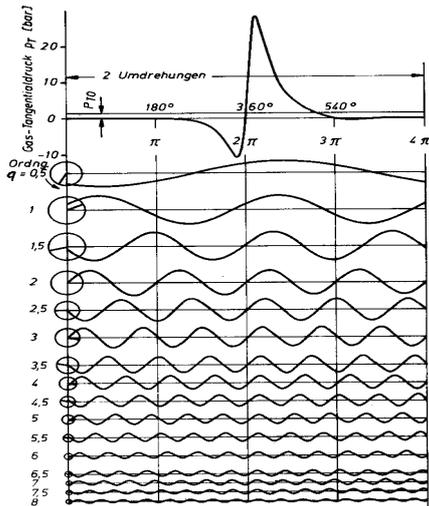


Figura 9: Exemplo de expansão em série de Fourier de uma curva de pressão tangencial.

Podemos ainda reescrever a equação 29 da seguinte forma:

Sabendo-se que:

$$\cos(n\omega \cdot t) = \frac{e^{in\omega \cdot t} + e^{-in\omega \cdot t}}{2}; \quad \sin(n\omega \cdot t) = \frac{e^{in\omega \cdot t} - e^{-in\omega \cdot t}}{2i}$$

Teremos:

$$A_n^k \cdot \cos(n\omega \cdot t) + B_n^k \cdot \sin(n\omega \cdot t) = A_n^k \cdot \frac{e^{in\omega \cdot t} + e^{-in\omega \cdot t}}{2} + iB_n^k \cdot \frac{e^{in\omega \cdot t} - e^{-in\omega \cdot t}}{2i} = \frac{1}{2} (A_n^k - iB_n^k) e^{in\omega \cdot t} + \frac{1}{2} (A_n^k + iB_n^k) e^{-in\omega \cdot t}$$

Fazendo:

$$C_n^k = \frac{1}{2} (A_n^k - iB_n^k) \quad \text{e} \quad \bar{C}_n^k = \frac{1}{2} (A_n^k + iB_n^k)$$

Obtém-se finalmente:

$$Mt^k(t) = \frac{A_0^k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^k \cdot e^{in\omega \cdot t} + \bar{C}_n^k \cdot e^{-in\omega \cdot t}] \quad (30)$$

O termo (A0) da série de Fourier não irá produzir vibrações no eixo da árvore de manivelas, mas sim um momento torçor constante sobre o qual irão se superpor às vibrações torcionais.

Podemos agora obter o vetor das excitações {b} da seguinte forma:

$$b_n(t) = \begin{Bmatrix} b1_n \\ b2_n \end{Bmatrix}$$

onde:

$$b1_n = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T;$$

$$b2_n = \left\{ 0 \ \frac{C_n^4}{I2} \ \frac{C_n^3}{I3} \ \frac{C_n^2}{I4} \ \frac{C_n^1}{I5} \ 0 \right\}^T$$

No vetor {b2}, podemos observar que a primeira e a última linhas são as que representam a parte anterior da árvore de manivelas e o volante respectivamente. Como essas inércias não possuem excitações externas, seus valores no vetor são nulos.

Cálculo da Resposta Permanente do Sistema – A resposta de um sistema vibratório excitado periodicamente, representado pela sua equação de estado, pode ser obtida

através da matriz fundamental, ou matriz de transição de estado:

$$\Phi(t) = e^{A \cdot t} \quad (31)$$

E a integral de convolução:

$$x(t) = \Phi(t) \cdot x(0) + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot b_0 \cdot d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot (b_n \cdot e^{in\omega\tau} + \bar{b}_n \cdot e^{-in\omega\tau}) \cdot d\tau \quad (32)$$

Como estamos interessados apenas na resposta permanente do sistema, podemos desconsiderar a resposta transitória  $\Phi(t) \cdot x(0)$ . Desenvolvendo-se a primeira integral e as integrais abrangidas pelo somatório da expressão da resposta à excitação periódica, teremos respectivamente como resultados:

$$x_0(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{A \cdot t} \cdot [e^{-A \cdot t} - \mathbf{I}] \cdot (-\mathbf{A}^{-1}) \cdot \mathbf{b}_0 = \frac{1}{2} [\mathbf{I} - e^{A \cdot t}] \cdot (-\mathbf{A}^{-1}) \cdot \mathbf{b}_0$$

E:

$$x_n(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot (b_n \cdot e^{in\omega\tau} + \bar{b}_n \cdot e^{-in\omega\tau}) d\tau = \int_0^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot (b_n \cdot e^{in\omega\tau} + \bar{b}_n \cdot e^{-in\omega\tau}) d\tau$$

A primeira integral refere-se ao termo constante da série de Fourier e como visto, este não promove vibrações na árvore de manivelas, sendo assim podemos desconsiderá-lo.

Expandindo a soma da segunda integral e aplicando as propriedades comutativas da matriz fundamental, teremos:

$$x_n(t) = -e^{A \cdot t} \cdot [(in\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot b_n + (-in\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \bar{b}_n]$$

Onde [I] é a matriz identidade de dimensões (12 x 12).

Podemos definir agora uma matriz que chamaremos de matriz de frequência, de dimensões (12 x 12) e a sua conjugada:

$$F_n = (in\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} ; \bar{F}_n = (-in\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (33)$$

Definiremos também, o vetor de resposta em frequência e seu conjugado:

$$g_n = F_n \cdot b_n ; \bar{g}_n = \bar{F}_n \cdot \bar{b}_n \quad (34)$$

Dessa forma a resposta para uma ordem n, poderá ser obtida da seguinte forma:

$$x_n(t) = g_n \cdot e^{in\omega t} + \bar{g}_n \cdot e^{-in\omega t} - e^{A \cdot t} \cdot (g_n + \bar{g}_n)$$

Considerando que  $t \rightarrow \infty$  e sendo o sistema assintoticamente estável, é possível verificar que o último termo da equação acima se anula e portanto, a resposta permanente de ordem n será:

$$x_n(t) = \theta_n(t) = g_n \cdot e^{in\omega t} + \bar{g}_n \cdot e^{-in\omega t} \quad (35)$$

O vetor de resposta em frequência {g} tem dimensões (12 x 1). As seis primeiras linhas representam os deslocamentos angulares e as seis últimas as velocidades angulares. No nosso caso, estaremos interessados apenas nas amplitudes de vibrações torcionais, ou sejam, as primeiras linhas do vetor.

Utilizando-se as relações de Euler, podemos dizer que:

$$\theta_{n_j}(t) = (g_{n_j} + \bar{g}_{n_j}) \cdot \cos(n\omega \cdot t) + i \cdot (g_{n_j} - \bar{g}_{n_j}) \cdot \sin(n\omega \cdot t) = 2 \cdot \text{Re}(g_{n_j}) \cdot \cos(n\omega \cdot t) - 2 \cdot \text{Im}(g_{n_j}) \cdot \sin(n\omega \cdot t)$$

Com j = 1 .. 6.

Através das relações trigonométricas, é possível obter finalmente as equações que determinam a amplitude de vibração e a fase para cada ordem n da excitação e para cada inércia j:

$$\theta_{n_j} = \Theta_{n_j} \cdot \cos(n\omega \cdot t - \phi_{n_j}) \quad (36)$$

Onde a amplitude de vibração será:

$$\Theta_{n_j} = 2 \cdot \sqrt{[\text{Re}(g_{n_j})]^2 + [\text{Im}(g_{n_j})]^2} = 2 \cdot |g_{n_j}| \quad (37)$$

E a fase:

$$\phi_{n_j} = \tan^{-1} \frac{-\text{Im}(g_{n_j})}{\text{Re}(g_{n_j})} \quad (38)$$

Finalmente, é possível obter a amplitude global de vibração torcional através da seguinte equação:

$$\theta_{n_j} = \sum_{n=1}^{24} \Theta_{n_j} \cdot \cos(n\omega \cdot t - \phi_{n_j}) \quad (39)$$

Na figura seguinte podemos observar graficamente as amplitudes das vibrações torcionais calculadas para a árvore de manivelas considerada nesta análise.

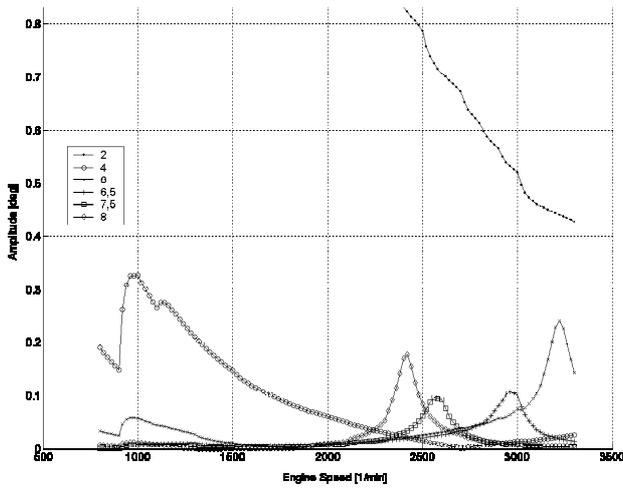


Figura 10: Torciograma.

Através da combinação dessas amplitudes com os demais carregamentos, é possível a verificação das tensões atuantes na árvore de manivelas utilizando-se um modelo de elementos finitos.

### BALANCEAMENTO DINÂMICO DA ÁRVORE DE MANIVELAS

As árvores de manivelas dos motores de quatro cilindros em linha são balanceadas estaticamente, devido à disposição das manivelas.

Porém durante o funcionamento, irão surgir momentos de fletores no virabrequim que são gerados pelo desbalanceamento dinâmico. Dependendo da rotação do motor, poderão ocorrer desalinhamentos nos munhões que acarretarão no desgaste excessivo das bronzinas e em casos extremos, até a falha do componente.

Para reduzir ou anular esses efeitos, são introduzidas massas em oposição aos moentes, que têm esta finalidade. Geralmente, é recomendável o balanceamento de 60 a 100% das massas rotativas do motor. Em alguns casos é feita também a compensação de um percentual das massas alternativas.

O percentual ou grau de balanceamento pode ser calculado através do equacionamento que segue:

$$PB = \frac{M_R}{M_I} \cdot 100\% \quad (40)$$

Onde:

$$M_I = m_2 \cdot r_2 \cdot d_2 + m_5 \cdot r_5 \cdot d_2$$

$$M_R = m_1 \cdot r_1 \cdot d_1 + m_3 \cdot r_3 \cdot d_3 + m_4 \cdot r_4 \cdot d_4 + m_6 \cdot r_6 \cdot d_6$$

O balanceamento da árvore de manivelas em estudo é de aproximadamente 60 %.

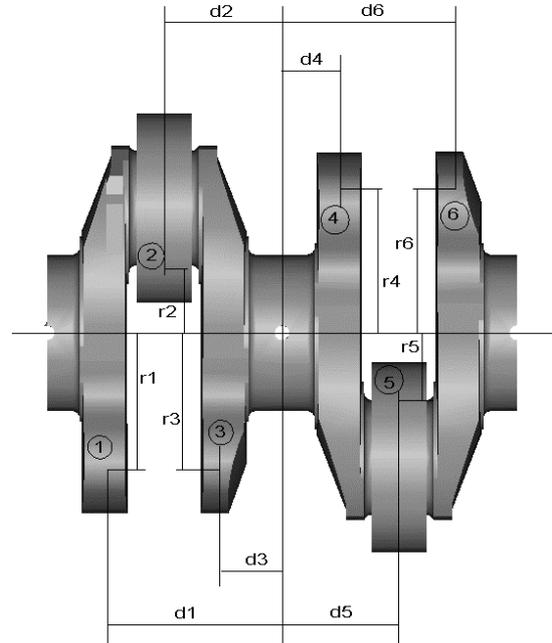


Figura 11: Dimensões para verificação do balanceamento.

### MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

MODELO – Utilizando um modelo geométrico completo ou parcial da árvore de manivelas e incluindo-se a região dos mancais do bloco do motor, de modo a considerar a sua rigidez, iremos gerar através elementos sólidos tetraédricos parabólicos, a malha de elementos finitos, a qual deve ser refinada nas regiões de concentração de tensões, ou seja, nos raios dos moentes e munhões e nos furos de óleo lubrificante.

Deveremos considerar elementos de contato entre os munhões da árvore de manivelas e os mancais principais. No caso de uma análise estática, não é necessária a consideração da rigidez do filme de óleo, visto que a complicação para a obtenção deste parâmetro, não irá justificar o ganho de precisão nos resultados. Numa análise modal, entretanto, esta rigidez afeta de forma considerável os valores das frequências naturais calculadas.

Os esforços transmitidos da biela para a árvore de manivelas podem ser aplicados sob a forma de pressão, distribuída em uma área de atuação previamente verificada, sem que exista a necessidade de simular o contato entre o olhal maior e o moente. Essa simplificação resulta em um

ganho considerável no tempo de processamento e o erro cometido será menor que 4,8 %.

Como iremos considerar o efeito das forças de inércia rotativas, deveremos incluir nos moentes as massas rotativas das bielas.

O modelo de elementos finitos considerado para esta análise possui 192543 elementos e 321086 nós.

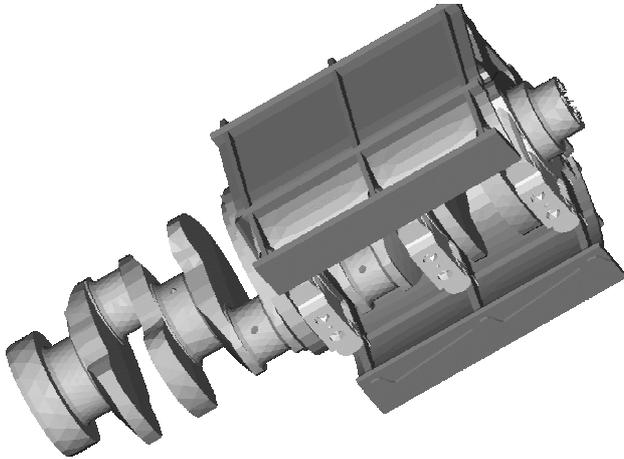


Figura 12: Modelo de elementos finitos

**CONDIÇÕES DE CONTORNO** – Deveremos analisar todas as condições de utilização do motor para definirmos qual é a mais crítica. De um modo geral, as condições mais severas são as de torque máximo, potência máxima e máxima rotação do motor.

Não é possível de antemão, dizer qual dessas condições será a de maior solicitação, pois existem diversos fatores que implicam em níveis de tensão mais ou menos elevados.

Para esse caso específico de aplicação, foram considerados os seguintes carregamentos:

Força Radial atuante na Árvore de Manivelas – De acordo com a equação 12, teremos:

Condição de máximo torque:  
(130 bar, 12° ATDC @ 1200 rpm):  $F_r = 103097 \text{ N}$ .

Condição de potência máxima:  
(130 bar, 12° ATDC @ 2500 rpm):  $F_r = 92318 \text{ N}$ .

Condição de máxima rotação:  
(80 bar, 6° ATDC @ 3300 rpm):  $F_r = 43141 \text{ N}$ .

Força de Inércia Alternativa – De acordo com a equação 9, teremos:

Condição de máximo torque:

(TDC @ 1200 rpm):  $F_a = 3480 \text{ N}$ .

Condição de potência máxima:  
(TDC @ 2500 rpm):  $F_a = 15104 \text{ N}$ .

Condição de máxima rotação:  
(TDC @ 3300 rpm):  $F_a = 24746 \text{ N}$ .

Força de Inércia Rotativa – Baseado na equação 10, poderemos aplicar o carregamento referente às massas rotativas do sistema. Normalmente os programas comerciais de análises pelo método dos elementos finitos, possuem uma forma bastante simples para aplicação dessas cargas, que consiste na imposição da velocidade angular do eixo para cada uma das condições apresentadas nos itens anteriores.

Torque Indicado do Motor – Esse carregamento é o termo constante obtido da expansão da curva do torque instantâneo em serie de Fourier. Obviamente, esse termo é diferente para cada condição de operação do motor.

Amplitudes das Vibrações Torcionais – Esses valores são obtidos através de um programa de computador específico, onde foi implementado o equacionamento exposto anteriormente.

Conhecidos os valores das amplitudes para cada ordem de vibração e para cada manivela, aplicam-se rotações no virabrequim correspondentes a cada condição de funcionamento. Abaixo, estão especificados os ângulos de vibração na extremidade anterior do virabrequim.

Condição de máximo torque: 0,04° @ 1200 rpm.

Condição de potência máxima: 0,18° @ 2500 rpm.

Condição de máxima rotação: 0,24° @ 3300 rpm.

Deverão ser aplicadas condições de simetria restringir o movimento do bloco do motor, bem como restrições de rotação no virabrequim de modo a evitar movimentos de corpo rígido.

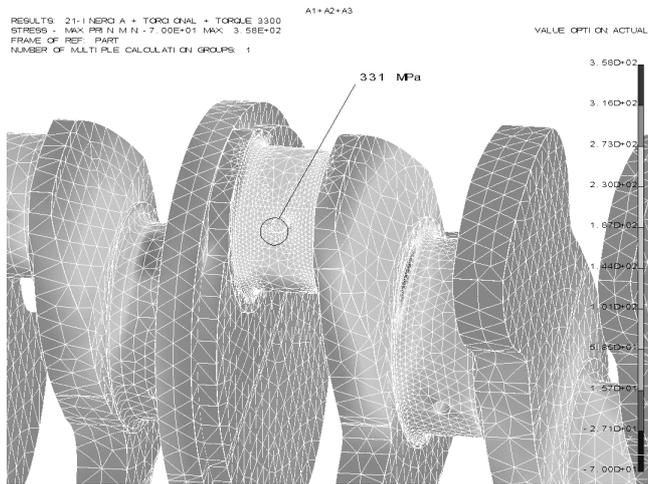


Figura 13: Tensão máxima principal.

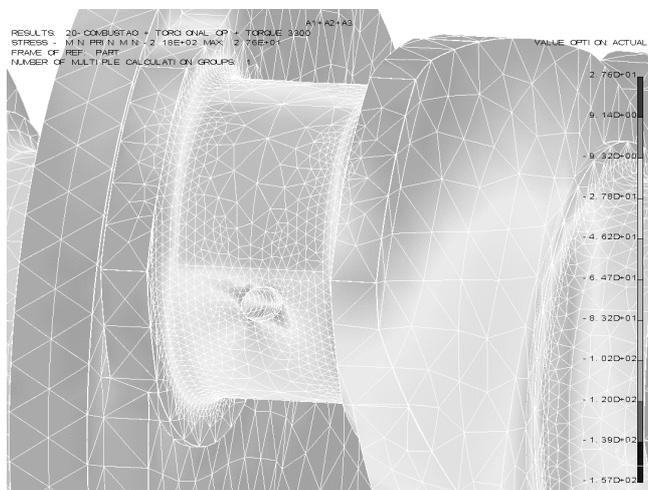


Figura 14: Tensão mínima principal.

## VERIFICAÇÃO DA RESISTÊNCIA À FADIGA DA ÁRVORE DE MANIVELAS

A teoria utilizada para a verificação do limite de resistência à fadiga neste estudo é baseada nos conceitos da fadiga de alto ciclo, considerando-se que o componente terá vida infinita para um número de ciclos superior a  $10^7$ .

Os carregamentos aplicados no modelo de elementos finitos deverão ser combinados, de modo a obtermos os maiores ciclos de fadiga para cada condição de operação do motor.

O ciclo crítico de fadiga para a árvore de manivelas em questão foi obtido combinando-se os seguintes carregamentos:

A tensão máxima principal foi calculada somando-se as tensões geradas pela força radial, forças de inércia

rotativas, amplitudes das vibrações torcionais e o torque indicado do motor.

A tensão mínima principal é o resultado da soma entre as forças de inércia alternativas, forças de inércia rotativas, amplitudes das vibrações torcionais de sentido oposto às anteriores e o torque indicado do motor.

Como as vibrações torcionais são de pequena amplitude, as tensões de cisalhamento atuantes na árvore de manivelas são pequenas e portanto, é possível a utilização de um diagrama de Goodman modificado, para análise de tensões de flexão.

Abaixo são mostradas algumas relações úteis para a verificação da resistência à fadiga de um componente:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad (41)$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (42)$$

Onde:

$\sigma_m$  = Tensão média

$\sigma_a$  = Amplitude da tensão cíclica

$\sigma_{\max}$  = Tensão máxima

$\sigma_{\min}$  = Tensão mínima

A figura seguinte torna mais evidentes as relações acima demonstradas.

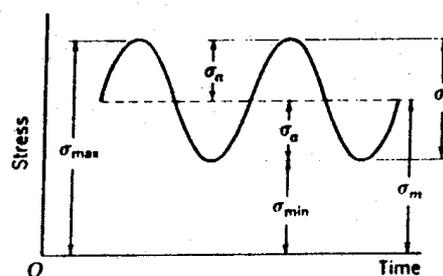


Figura 15: Tensões cíclicas.

Obtida a tensão média do ciclo e tendo disponível o diagrama de Goodman para o material da árvore de manivelas, é possível avaliar o coeficiente de segurança à fadiga do componente [9], [10].

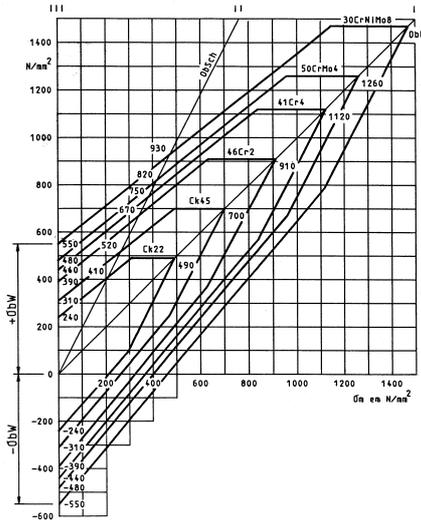


Figura 16: Diagrama de Goodman modificado.

A obtenção do limite de fadiga do material deve ser feita preferencialmente, através de peças acabadas para que se leve em consideração todos os fatores que têm influência na determinação do limite de fadiga.

Devido ao alto custo para obtermos essa propriedade através da quebra de vários componentes, podemos avaliar a resistência do componente, utilizando-se os fatores modificadores da resistência à fadiga.

**FATORES MODIFICADORES DO LIMITE DE FADIGA** – A partir do limite de fadiga de um corpo de prova padronizado, é possível estimar o limite de fadiga de um componente qualquer, utilizando-se os fatores descritos abaixo.

$$\sigma_{bw} = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot k_f \cdot \sigma_{bw}' \quad (43)$$

Onde:

$\sigma_{bw}$  = Limite de fadiga por flexão alternada do corpo de prova

$\sigma_{bw}'$  = Limite de fadiga por flexão alternada do componente

$k_a$  = Fator de acabamento superficial

$k_b$  = Fator de tamanho

$k_c$  = Fator de confiabilidade

$k_d$  = Fator de temperatura

$k_e$  = Fator do efeito das concentrações de tensão

$k_f$  = Fatores diversos

Basicamente, são quatro os fatores que deverão ser levados em consideração para essa análise:

**Fator de Acabamento Superficial** – Em função da rugosidade superficial de uma peça e da sua resistência à tração, existirá uma grande variação no limite de fadiga. Essa variação foi bastante estudada para o caso dos aços e poderá ser utilizada para os ferros fundidos nodulares e aços fundidos.

Para uma rugosidade superficial de 4  $\mu\text{m}$  e um limite de ruptura de 1800 MPa, o fator de acabamento superficial será de 0,855.

**Fator de Tamanho** – Este fator leva em consideração a redução que existe na resistência à fadiga de um componente, em função do aumento do seu diâmetro e pode ser quantificado através da seguinte equação:

$$k_b = 1,189 \cdot d^{-0,097} \quad (44)$$

Considerando o diâmetro dos moentes de 63 mm, teremos como fator de tamanho 0,796.

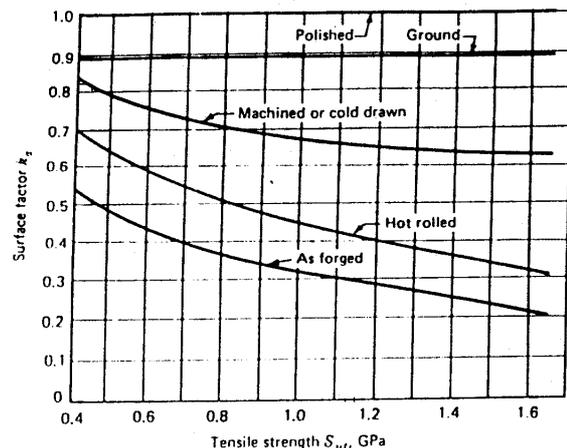


Figura 17: Fator de acabamento superficial [10].

**Fator de Confiabilidade** – Devido à natureza estatística do valor do limite de fadiga de um material, torna-se necessária a introdução desse fator para a estimativa dessa propriedade. Geralmente os ensaios de fadiga são realizados com uma confiabilidade de 50%.

Para efeito de cálculo, consideramos confiabilidades entre 95 a 99%, seguindo a distribuição normal, que implicam respectivamente em fatores de 0,868 a 0,814.

**Fator de Temperatura** – Leva em consideração o efeito da redução do limite de fadiga, que ocorre com o aumento da temperatura na qual o componente está sujeito.

Existirá uma redução considerável nesta propriedade, para temperaturas acima de 350 °C. Como as árvores de manivelas operam em temperaturas inferiores, podemos considerar  $k_d = 1,0$ .

Outros fatores modificadores do limite de fadiga dos componentes como, por exemplo, os devidos às concentrações de tensão, já estão sendo levados em consideração no modelo de elementos finitos.

Considerando todos esses fatores, é possível a determinação do limite de fadiga corrigido para as regiões tratadas termicamente. Esse valor será de 366 Mpa.

Pelo fato das árvores de manivelas serem componentes onde falhas estruturais não são admitidas, torna-se necessária a consideração de um fator de segurança à fadiga, compatível com as características do material e os desvios do processo de fabricação, que por mais controlados que sejam sempre existirão.

A figura seguinte mostra o diagrama de Goodman para a árvore de manivelas analisada, incluindo as tensões do carregamento responsável pelo maior ciclo de fadiga encontrado.

As linhas tracejadas representam os limites onde, estatisticamente não deverão ocorrer falhas estruturais no componente.

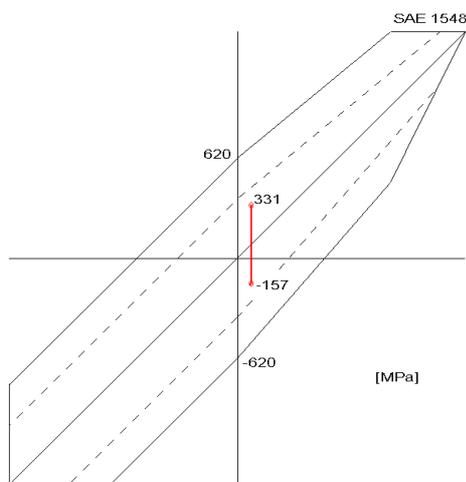


Figura 18: Diagrama de Goodman para o componente.

O coeficiente de segurança à fadiga para a árvore de manivelas analisada é de 2,47.

Considerando-se todos os efeitos que possam ter influência neste componente, estimamos que o coeficiente de segurança mínimo a ser admitido é de 1,73.

## CARACTERÍSTICAS DO MOTOR CONSIDERADO NESTE ESTUDO

A seguir serão apresentadas as principais características do motor cuja árvore de manivelas foi objeto deste estudo.

Seqüência de ignição: 1-3-4-2

Sentido de rotação: Anti-horário, visto pelo volante.

Comprimento da biela: 207 mm

Diâmetro do pistão: 105 mm

Meio curso da árvore de manivelas: 68,5 mm

Torque máximo: 700 N.m @ 1200 rpm

Potência máxima: 152 kW @ 2500 rpm

Rotação máxima do motor: 2850 rpm

Massas alternativas: 2,417 kg

Inércias [kg.m<sup>2</sup>]:

I1 = 0,0340

I2 = 0,0438

I3 = 0,0438

I4 = 0,0624

I5 = 0,0448

I6 = 0,460

Rigidez torcional [N.m/rad]:

Kt1 = 1516000

Kt2 = 1271000

Kt3 = 1612000

Kt4 = 1186000

Kt5 = 2212000

Frequências naturais da árvore de manivelas:

1°: 0,0

4°: 1212,0 Hz

2°: 332,6 Hz

5°: 1458,6 Hz

3°: 761,7 Hz

6°: 1637,6 Hz

Diâmetro dos moentes: 63 mm

Diâmetro dos munhões: 86 mm

Material da árvore de manivelas: SAE J403 – UNS G15480

## CONCLUSÕES

De acordo com os resultados obtidos, verifica-se que a árvore de manivelas analisada não apresentará problemas estruturais quando em funcionamento.

A utilização de uma curva de combustão otimizada irá promover baixas amplitudes de vibrações torcionais. Sendo assim, de acordo com a metodologia de cálculo apresentada, verifica-se que é possível a remoção do anti-vibrador do virabrequim.

## REFERÊNCIAS

[1] Maass H., Klier H., 1981, Kräfte, Momente und deren Ausgleich in der Verbrennungskraftmaschine, Springer-Verlag/Wien, ISBN 3-211-81677-1.

[2] Brunetti F., Garcia O., 1992, Motores de Combustão Interna, FEI.

[3] Taylor C. F., 1985, The Internal Combustion Engine in Theory and Practice – Vol. 2, MIT Press, ISBN 0-262-70027-1.

[4] Muller P. C., Schiehlen W. O., 1985, Linear Vibrations, Martinus Nijhoff Publishers, ISBN 90-247-2983-1.

[5] Meirovitch L., 2000, Principles and Techniques of Vibration, Prentice Hall.

[6] Inman D. J., 2001, Engineering Vibration, Prentice Hall, ISBN 0-13-726142-X.

[7] Dedini, K. L. C., Cavalcante P. F., 2001, Modelagem e Análise de Máquinas Rotativas e Estrutura de Suporte, Unicamp.

[8] Arruda J. R. F., Huallpa B. N., 2002, Introdução à Análise Espectral, Unicamp.

[9] Dieter G. E., 1988, Mechanical Metallurgy, Mc-Graw-Hill.

[10] Shigley J. E., 1986, Mechanical Engineering Design, Mc-Graw-Hill.

The appearance of the ISSN code at the bottom of this page indicates SAE's consent that copies of the paper may be made for personal or internal use of specific clients. This consent is given on the condition however, that the copier pay a \$ 7.00 per article copy fee through the Copyright Clearance Center, Inc. Operations Center, 222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923 for copying beyond that permitted by Sections 107 or 108 of U.S. Copyright Law. This consent does not extend to other kinds of copying such as copying for general distribution, for advertising or promotional purposes, for creating new collective works, or for resale.

SAE routinely stocks printed papers for a period of three years following date of publication. Direct your orders to SAE Customer Sales and Satisfaction Department.

Quantity reprint rates can be obtained from the Customer Sales and Satisfaction Department.

To request permission to reprint a technical paper or permission to use copyrighted SAE publications in other works, contact the SAE Publications Group.



*All SAE papers, standards, and selected books are abstracted and indexed in the Global Mobility Database.*

No part of this publication may be reproduced in any form, in an electronic retrieval system or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

**ISSN 0148-7191**

**© Copyright 2003 Society of Automotive Engineers, Inc.**

Positions and opinions advanced in this paper are those of the author(s) and not necessarily those of SAE. The author is solely responsible for the content of the paper. A process is available by which discussions will be printed with the paper if it is published in SAE Transactions. For permission to publish this paper in full or in part, contact the SAE Publications Group.

Persons wishing to submit papers to be considered for presentation or publication through SAE should send the manuscript or a 300 word abstract of a proposed manuscript to: Secretary, Engineering Meetings Board, SAE.